

Simulación numérica del cruce de trenes: combinación de un método de reducción del modelo con una implementación de los elementos de contorno

LUTZ HERMANN¹ Y ENRIQUE ALARCÓN²

¹ Centro de Modelado en Ingeniería Mecánica (F2I2-CEMIM)
Fundación para el Fomento de la Innovación Industrial

² Dpto. de Mecánica Estructural
Universidad Politécnica de Madrid

lhermanns@etsii.upm.es, alarcon@estru.upm.es

Resumen

En este artículo se presentan los resultados obtenidos con un método aproximado para calcular las historias temporales de los coeficientes aerodinámicos correspondientes a las fuerzas y los momentos a que están sometidos los coches de cabeza durante el cruce de dos trenes de alta velocidad al aire libre. El método aproximado utiliza funciones de forma construidas partiendo de soluciones de algunos pasos de tiempo y resuelve un problema de tamaño reducido, consiguiendo un ahorro de tiempo considerable y conservando una precisión aceptable en los resultados. Así, se puede llevar a cabo la simulación de un cruce de trenes en apenas 8 horas y media en un ordenador personal equipado con un procesador Pentium IV corriendo a 2,67 GHz.

1 Introducción

Con el continuo aumento de las velocidades de circulación de los trenes de pasajeros han surgido fenómenos relacionados con la aerodinámica que no se suelen presentar con tanta intensidad en líneas férreas convencionales, en las que la velocidad de circulación no supera los 200 km/h. Entre ellos destacan los siguientes:

- El control de la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria.

Fecha de recepción: 25/07/05

- La onda de presión que provoca el tren al entrar en un túnel y que puede manifestarse en la vibración de los cristales de edificaciones ubicadas en la cercanía de la boca opuesta (*sonic boom*).
- La proyección del balasto.
- Estabilidad de marcha bajo la presencia de viento lateral.
- Las fuerzas provocadas en operarios o pasajeros esperando en un andén.
- Cuestiones de confort y seguridad durante el cruce de trenes en el túnel.
- Rotura de cristales debido a las altas presiones producidas durante un cruce.
- Cuestiones de confort y seguridad durante el cruce de trenes al aire libre.

Algunos de estos puntos afectan directamente a la seguridad de los viajeros y por tanto es crucial su cuidadoso estudio.

En la implementación del modelo aerodinámico utilizado para la obtención de los resultados presentados en el presente artículo, se ha supuesto que el campo de flujo es irrotacional y que la viscosidad y compresibilidad del fluido son nulas. Estas simplificaciones permiten describir el comportamiento del fluido con una sola ecuación en derivadas parciales, la *ecuación de Laplace*. El precio a pagar consiste en la limitación de la aplicabilidad de dicho modelo.

El *método de los elementos de contorno* ha demostrado a lo largo de las últimas tres décadas sus ventajas en cierto tipo de aplicaciones. Una de ellas es el estudio aerodinámico de perfiles de alas de avión o de vehículos terrestres mediante modelos aerodinámicos lineales como el del flujo potencial. Es evidente que la aplicación de un modelo de este tipo está limitada a las situaciones en las que, por un lado, las separaciones de flujo se limitan a zonas muy pequeñas en comparación con la extensión del objeto al no influir demasiado en los resultados globales y, por otro, aquéllas en las que la compresibilidad del fluido puede no tenerse en cuenta. Por tanto, se considera que la precisión de los resultados obtenidos mediante un modelo aerodinámico lineal en la cabeza tractora de un tren de alta velocidad es aceptable mientras que no haya mucho viento lateral que pueda provocar el desprendimiento del flujo.

Resumiendo, se puede decir que el modelo del flujo potencial sólo podría emplearse para el estudio de los dos últimos puntos de la lista anterior.

2 Modelo aerodinámico lineal

A continuación se presenta de manera breve la formulación del modelo aerodinámico utilizado.

Suponiendo un campo de flujo irrotacional y solenoidal de un fluido incompresible, la velocidad \vec{V} puede derivarse de un potencial escalar como sigue:

$$\vec{V} = \nabla u. \quad (1)$$

La forma general de la ecuación de la conservación de masa es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2)$$

siendo ρ la densidad; la expresión anterior se reduce para un fluido incompresible homogéneo a

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (3)$$

Sustituyendo \vec{V} en (3) por (1), llegamos a la bien conocida ecuación diferencial de Laplace

$$\text{div } \nabla u = \Delta u = 0. \quad (4)$$

Es importante recordar que la ecuación de Laplace describe fenómenos de carácter estacionario. El carácter no estacionario de las variaciones de presión se introduce a través de la derivada del potencial con respecto al tiempo usando la ecuación de Bernoulli

$$p = p_\infty + \rho \left\{ \vec{V}_0 \cdot \nabla u - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial u}{\partial t} \right\}, \quad (5)$$

donde p_∞ se denomina *presión de referencia* y \vec{V}_0 es la velocidad constante del sistema de coordenadas de referencia fijado en el objeto en que se calcula la presión. La derivada del potencial con respecto al tiempo se puede aproximar utilizando un esquema de diferencias finitas.

Las condiciones de contorno se formulan de manera que la velocidad relativa en la dirección normal con respecto a las paredes del objeto es nula, es decir:

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n}, \quad (6)$$

donde \vec{n} es el vector normal en la superficie del objeto, apuntando desde la zona ocupada por el fluido hacia el interior del objeto.

3 Implementación del método de los elementos de contorno

Para la simulación del cruce de dos trenes al aire libre se ha desarrollado un programa de ordenador basado en una implementación del método directo de los elementos de contorno. Para una descripción detallada del método de los elementos de contorno se recomienda consultar las referencias [1] ó [2].

A continuación se resumen las características más importantes del programa desarrollado:

- Elementos isoparamétricos de cuatro nodos.
- Integración de los coeficientes del sistema de ecuaciones mediante un método adaptativo.

- Aprovechamiento de varios procesadores para la integración de los coeficientes utilizando varios hilos de trabajo.
- Resolución del sistema de ecuaciones mediante el método iterativo GMRES(50).
- Tratamiento de dos vectores de carga (casos simétrico y antisimétrico).
- Cálculo de los coeficientes constantes sólo en el primer paso de tiempo.
- Método aproximado mediante descomposición ortogonal y elección del intervalo entre dos pasos de control sucesivos.

Dicho programa se diferencia de las implementaciones habituales sobre todo en el último punto de la lista anterior, que se describe a continuación en más detalle.

En el caso de problemas tridimensionales el número de incógnitas suele ser muy elevado. Así, por ejemplo en los casos relacionados con los cruces de trenes, el número de incógnitas oscila entre 6.000 y 11.000, en función de la longitud de los trenes y el nivel de detalle utilizado en su discretización. El objetivo de estas simulaciones es obtener historias temporales de presiones, fuerzas y momentos, con lo cual hay que calcular las matrices de coeficientes para muchas configuraciones geométricas distintas, aunque los coeficientes cambien poco entre dos pasos de tiempo sucesivos. Tanto es así que al menos la mitad de los coeficientes no cambia al relacionar puntos de colocación y elementos que pertenecen al mismo objeto. Aprovechando esta situación, los coeficientes se calculan sólo una vez en el primer paso. Aparte de guardar los propios coeficientes también hay que guardar su contribución al vector de carga. Para simular el paso de las cabezas tractoras con un desplazamiento relativo en cada paso de tiempo de 0,4 m, el número de pasos de tiempo suele estar entorno a 200. Los dos procesos más costosos en tiempo de cálculo para la simulación son el cálculo de los coeficientes y la resolución del sistema, estando muy por encima el primero ya que en general son necesarias menos de 60 iteraciones del método GMRES para reducir el residuo a un nivel aceptable.

El carácter estacionario de las soluciones de la ecuación de Laplace implica que la solución del potencial en un instante de tiempo no depende de las soluciones correspondientes a todos los instantes de tiempo anteriores. La solución transitoria en un instante de tiempo en particular depende por tanto sólo de las dos o tres soluciones estacionarias en pasos de tiempo sucesivos, según la aproximación temporal elegida en forma de diferencias finitas. Este aspecto es muy importante al permitir la cuantificación del error correspondiente a un método aproximado en cualquier paso de tiempo aunque no se disponga de la solución exacta en todos los pasos anteriores. Esta particularidad del problema ha motivado el desarrollo de un método aproximado que se describe más adelante.

El modelo empleado para la simulación del cruce comprende 7916 elementos. En la Figura 1 se presenta una vista isométrica de uno de los dos trenes de idéntico diseño.

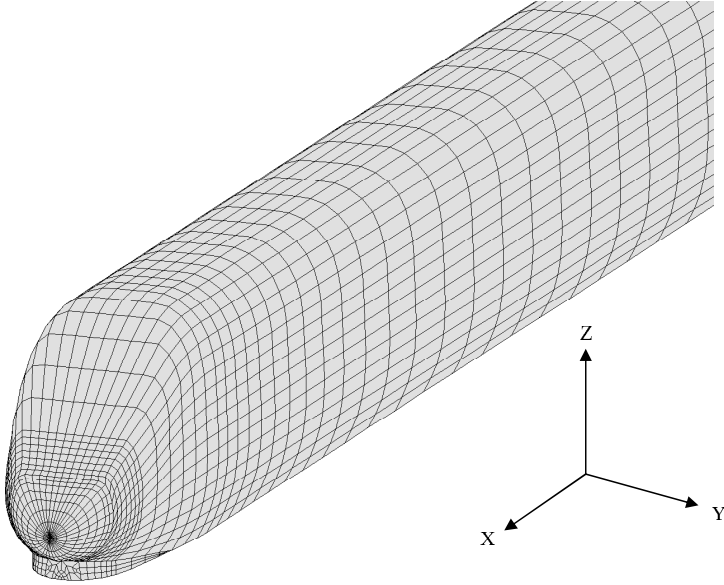


Figura 1: Vista isométrica de la malla de cálculo

4 El método aproximado

En el método aproximado se utilizan las soluciones $u(t_i)$ del potencial de algunos pasos de tiempo t_i para generar una matriz de observaciones

$$X = [u(t_1)^T \ u(t_2)^T \ \cdots].$$

El intervalo entre dos pasos utilizados para ello es un dato de entrada. La aplicación de la descomposición de valores singulares a la matriz de observaciones permite extraer las funciones de forma espaciales más importantes y con ellas se define una base vectorial inicial. Por tanto, se obtienen las tres matrices Φ , Σ y Ψ como sigue:

$$X = \Phi \Sigma \Psi^T.$$

Las columnas de la matriz Φ contienen las funciones de forma, que son los autovectores de la matriz de covarianzas de la matriz de observaciones

$$R = X X^T,$$

mientras que la matriz Σ contiene los valores singulares en la diagonal (sus cuadrados coinciden con los autovalores de la matriz de covarianzas R). Las funciones de ponderación en el tiempo se obtienen proyectando la matriz de

observaciones en las direcciones de los distintos autovectores, aunque este paso no se lleva a cabo, dado que las funciones de ponderación no son de interés para el cálculo posterior.

Para la elección de los vectores que componen la base vectorial inicial se seleccionan aquéllos cuyos autovalores no son inferiores a 10^6 veces el autovalor máximo.

A continuación se procede al cálculo de las soluciones de la manera habitual, es decir utilizando las matrices completas, en los llamados pasos de control. Después se eligen las filas del sistema de ecuaciones que serán utilizadas para calcular una solución aproximada con la base actual. Los resultados son por un lado la matriz de coeficientes reducida H_{red} y por otro el vector de carga reducido f_{red} . A continuación se calcula la solución aproximada con la base actual Φ_{act} en los siguientes dos pasos:

$$\bar{a} = \arg \min (\|H_{red}\Phi_{act}a - f_{red}\|),$$

$$u_{aprox} = \Phi_{act}\bar{a}.$$

Comparando el residuo resultante se procede a enriquecer la base con una o más funciones de forma adicionales si fuese necesario. Las funciones de forma adicionales suelen derivarse del propio vector residual.

Este proceso se repite hasta reducir el residuo a un nivel aceptable. En general es suficiente la ampliación de la base por el vector del residuo normalizado para conseguir la convergencia. Se supone que la base determinada de esta forma contiene la información suficiente para aproximar las soluciones correspondientes a pasos de tiempo vecinos con una precisión aceptable. En el siguiente paso se calculan para estos pasos de tiempo las soluciones aproximadas del problema reducido, es decir, solamente se calculan los coeficientes de una parte reducida del sistema de ecuaciones.

Es evidente que el número de ecuaciones de control del problema reducido influye mucho en el tiempo de cálculo del algoritmo. Mientras que en problemas pequeños se pueden elegir las filas de control manualmente, en el caso de modelos tridimensionales con varios miles de grados de libertad se optará por elegir cada k -ésima fila del sistema de ecuaciones. Para variar las ecuaciones de control a lo largo de la simulación se desplaza este conjunto de manera aleatoria en cada paso de tiempo. De esta forma se consigue un muestreo sobre todas las ecuaciones del sistema a lo largo de la simulación. El límite inferior para la cantidad de filas lo marca el número de vectores base. En consecuencia, tanto el número de los vectores base como el de las ecuaciones de control pueden variar durante una simulación. Los resultados presentados a continuación han sido calculados utilizando el 10 % de las filas del sistema completo siendo el número de vectores base al comienzo de la simulación de 21.

En el diagrama de flujo presentado en la Figura 2 se han resumido los pasos más importantes del método aproximado, siendo cada cuarto paso uno de control.

En el contexto de la reducción de modelos existen los conceptos de controlabilidad y observabilidad de estados del sistema. Dichos conceptos son

muy importantes a la hora de reducir el modelo de manera adecuada. Para la elección de las funciones de forma más importantes se suelen calcular los valores singulares de Hankel, aunque en la implementación desarrollada se aplica un criterio más sencillo que, como ya se comentó anteriormente, consiste en la eliminación de la base completa de aquellas funciones de forma cuyos autovalores son inferiores a 10^{-6} veces el del valor máximo. Para una descripción detallada de los conceptos más sofisticados como por ejemplo el de la reducción de modelos mediante truncamiento en el espacio de estados se recomienda consultar la literatura correspondiente, como por ejemplo [3] y [4]. El aumento de la base durante una simulación con cientos de pasos puede aumentar el tiempo de cálculo necesario de manera significativa. Por tanto, existe la posibilidad de

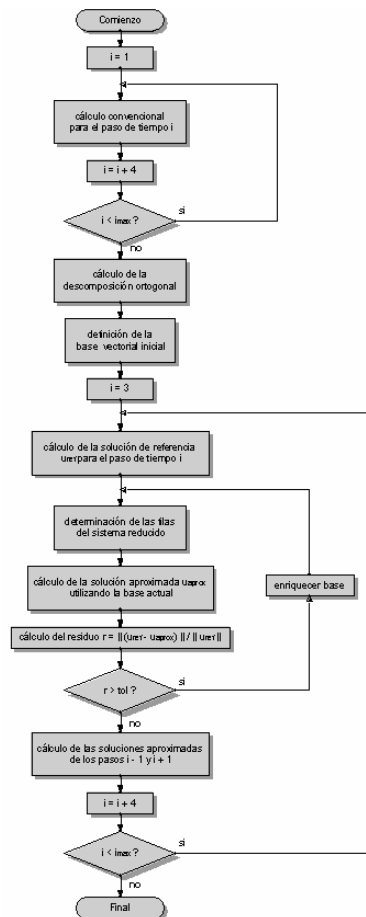


Figura 2: Diagrama de flujo del método aproximado

comprobar, en cada paso de control, si se puede eliminar un vector de la base

para limitar el tamaño de ella. Al igual que ocurre al enriquecer la base donde existen varias opciones de determinar el vector nuevo, a la hora de reducir la base hay que emplear algún criterio. En este sentido no hay que olvidar que dicho vector puede tener una participación importante en pasos de tiempos posteriores. Un criterio que se base solamente en el peso de la contribución de cada uno de los vectores de la base en la solución correspondiente al paso de control no tiene en cuenta este aspecto. En general, no se recomienda eliminar los vectores de la base inicial debido a la evidente importancia para la simulación. Aunque se hayan obtenido buenos resultados con un programa para problemas bidimensionales en que se permite la reducción de la base, a lo largo de la simulación se ha renunciado a la implementación de esta característica en el programa para problemas tridimensionales.

Es evidente que el ahorro de tiempo de cálculo se debe a la determinación de la solución de algunos pasos de tiempo con el sistema reducido. Siendo cada cuarto paso uno de control y habiendo utilizado las soluciones correspondientes a una cuarta parte para calcular la matriz de observaciones al comienzo de la simulación, se ha obtenido la solución “exacta” en cada segundo paso de tiempo. Entonces se podría plantear la siguiente pregunta. ¿Por qué no se interpola linealmente entre las soluciones exactas para obtener las soluciones aproximadas para los restantes pasos de tiempo?

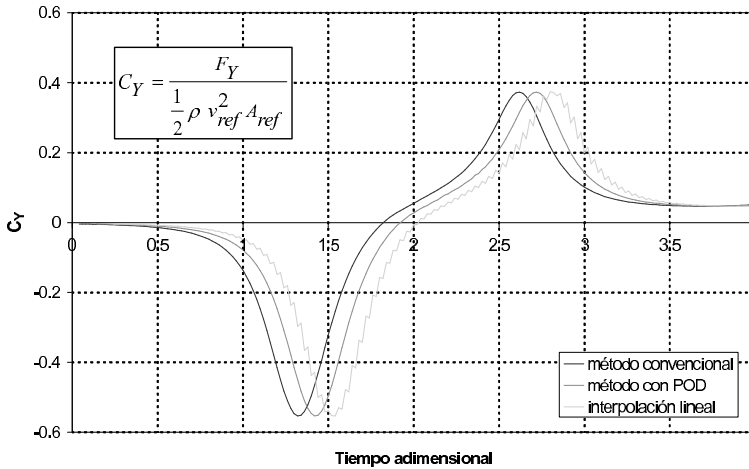


Figura 3: Comparación de las historias temporales del coeficiente C_Y calculadas con distintos métodos

Contemplando la Figura 3, se puede fácilmente deducir la respuesta a esta pregunta, ya que la precisión de los resultados no es ni mucho menos satisfactoria. En dicha figura se han presentado las tres historias temporales para el coeficiente aerodinámico C_Y correspondientes a la solución de referencia, la obtenida con el método aproximado y la obtenida por interpolación lineal.

Para facilitar la identificación de las diferencias se ha introducido un incremento temporal de 0,1 para las dos últimas curvas. Se observa claramente que el método aproximado (método con POD) conserva la regularidad de la solución de referencia mientras que la historia temporal obtenida interpolando linealmente introduce cambios bruscos en la solución. Al imponer ésta última como carga transitoria a un modelo de elementos finitos de la estructura de los coches se producirían vibraciones que en la realidad no existen.

La calidad de los resultados para otros coeficientes es muy parecida, como se puede observar en la Figura 4, donde se presentan las historias temporales del coeficiente C_N .

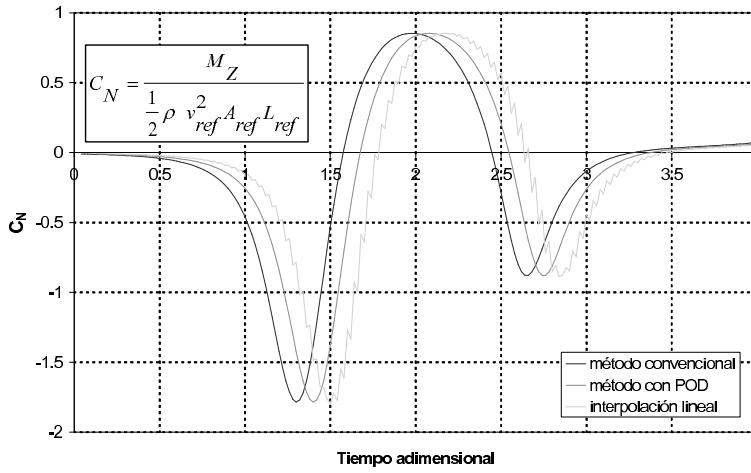


Figura 4: Comparación de las historias temporales del coeficiente C_Y calculadas con distintos métodos

El ahorro de tiempo en el caso estudiado corresponde al 30 % del resultante al usar el método convencional.

Referencias

- [1] G. BEER, *Programming the Boundary Element Method*, Wiley & Sons, 2001.
- [2] C. A. BREBBIA, J. DOMINGUEZ, *Boundary Elements : an Introductory Course*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1989
- [3] B. RAHN, *A Balanced Truncation Primer*, Institute for Quantum Information, California Institute of Technology, 2001.
- [4] K. ZHOU, J. C. DOYLE, K. GLOVER, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.